



Facultad de Informática

Grado en Ingeniería Informática

Lógica

1/12

PARTE 3: DEMOSTRACIÓN AUTOMÁTICA

Tema 12: Teorema de Herbrand

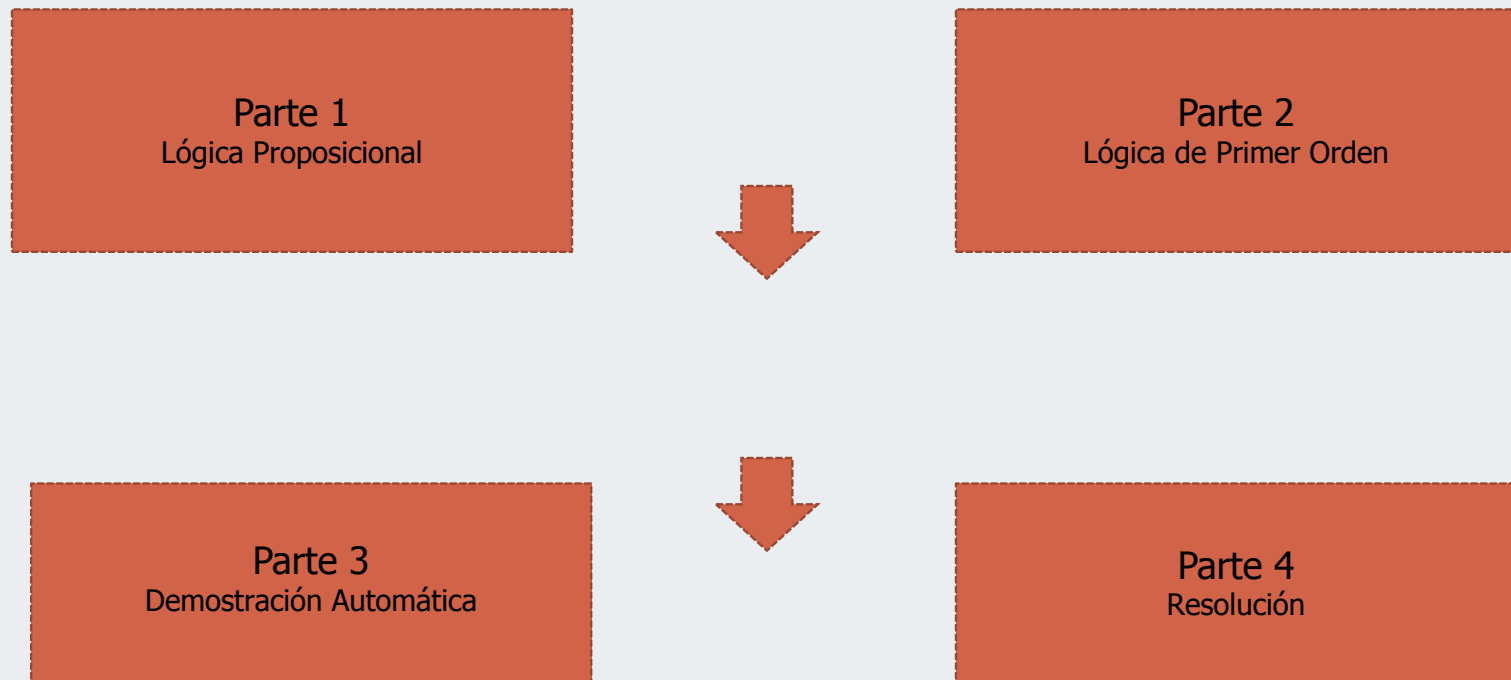
Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es



Introducción.

2/12

❑ Componentes





Introducción.

3/12

{llueve o hace sol, no llueve, no hace sol}

- Si doy por cierto que “llueve o hace sol” y afirmo que “no llueve”, entonces llegaría a la conclusión de que “hace sol”
- Pero si también afirmo que “no hace sol”, esto es contradictorio con la deducción anterior, por lo que
- Es inconsistente hacer las tres afirmaciones anteriores simultáneamente



Motivación.

4/12

- Sabemos que $\{I \vee s, \neg I, \neg s\}$ define la fórmula $(I \vee s) \wedge \neg I \wedge \neg s$

I	s	$I \vee s$	$\neg I$	$\neg s$	$(I \vee s) \wedge \neg I \wedge \neg s$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F

insatisfacible

- También podemos demostrar que $T[I \vee s, \neg I, \neg s] \vdash s \wedge \neg s$

- $I \vee s$ premisa
- $\neg I$ premisa
- s corte 1,2
- $\neg s$ premisa
- $s \wedge \neg s$ $I \wedge 3,4$

- Por tanto, **de una fórmula insatisfacible hemos llegado a deducir una contradicción**



Motivación.

5/12

- **Idea general:** Plantear un método de obtención de nuevas instancias deducidas del conjunto original, de forma que **si llega a deducirse un literal y su negación puede concluirse que el conjunto original es insatisfacible.**
- Está basado en el **lema de la contradicción**: Una fórmula F es insatisfacible sii a partir de ella se puede deducir una contradicción ($T[F] \vdash P \wedge \neg P$)
 1. $T[F] \vdash P \wedge \neg P$ sii $\models F \rightarrow P \wedge \neg P$ (teorema de la deducción)
 2. Por definición: $\models F \rightarrow P \wedge \neg P$ sii en toda interpretación i o bien $i(F) = F$ o bien $i(F) = V$ y $i(P \wedge \neg P) = V$
 3. Pero $i(P \wedge \neg P) = F$ para toda i , por tanto $\models F \rightarrow P \wedge \neg P$ sii en toda interpretación i , $i(F) = F$
 4. $\models F \rightarrow P \wedge \neg P$ sii F es insatisfacible
 5. $T[F] \vdash P \wedge \neg P$ sii F es insatisfacible (silogismo 1,4)



El método de resolución de Robinson.

6/12

- Está basado en la **regla de resolución básica**: De dos instancias básicas $L \vee C1$ y $\neg L \vee C2$ (L es un literal) puede deducirse una nueva instancia básica $C1 \vee C2$, llamada **resolvente**

$$\begin{array}{ccc} L \vee C1 & & \neg L \vee C2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & C1 \vee C2 & \end{array}$$

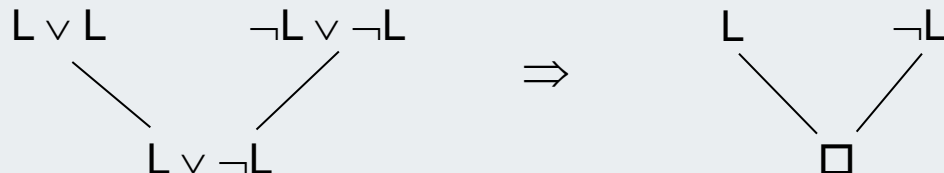
- La aplicación sucesiva de la regla de resolución permite obtener una contradicción cuando el conjunto original es insatisfacible
- La contradicción se obtiene cuando se deducen dos instancias básicas (literales aislados) L y $\neg L$. La aplicación de la regla sobre L y $\neg L$ genera \square , llamada **cláusula vacía**



El método de resolución de Robinson.

7/12

- Para asegurarnos de deducir la cláusula vacía siempre que el conjunto sea contradictorio, necesitamos tener en cuenta la idempotencia ($L \vee L \Rightarrow L$)



- **Regla de resolución básica extendida:** De dos instancias básicas $L \vee \dots \vee L \vee C1$ y $\neg L \vee \dots \vee \neg L \vee C2$ (L es un literal) puede deducirse una nueva instancia básica $C1 \vee C2$
- La aplicación de esta regla extendida se denomina ***paso de resolución*** sobre L con resolvente $C1 \vee C2$



El método de resolución de Robinson.

8/12

Método: Dado un conjunto C de instancias básicas:

- 1) Generar el conjunto R de todos los resolventes que pueden obtenerse aplicando la regla de resolución entre instancias del conjunto C de todas las formas posibles
- 2) Si \square está incluida en R entonces terminar $\rightarrow C$ es insatisfacible
- 3) Si $R \subseteq C$ significa que ya se han generado todos los resolventes posibles, entonces terminar $\rightarrow C$ es satisfacible
- 4) Hacer $C = C \cup R$ y repetir desde 1)



El método de resolución de Robinson.

9/12

- El método de resolución es correcto
 - Si por la aplicación sucesiva de la regla de resolución deducimos \square , entonces el conjunto inicial de instancias básicas es insatisfacible.
- El método de resolución es completo
 - Si el conjunto inicial es insatisfacible, entonces podemos asegurar que con la aplicación sucesiva de la regla de resolución llegaremos a deducir la cláusula vacía.
- Un conjunto de instancias básicas es insatisfacible sii se puede deducir \square a partir de él por resolución
- **Se podría definir un nuevo sistema de deducción basado en la regla de resolución. Este sistema tendría una única regla y por tanto sería mucho más simple que otros sistemas de deducción formales que utilizan más reglas de deducción (ej. deducción natural)**



El método de resolución de Robinson.

10/12

- $C = \{I1: \neg p(a, f(b)), \quad I2: \neg p(b, f(b)), \quad I3: p(a, f(b)) \vee q(f(b)), \quad I4: p(b, f(b)) \vee \neg q(f(b))\}$
 - resuelve I1 con I2: NO
 - resuelve I1 con I3: $q(f(b))$
 - resuelve I1 con I4: NO
 - resuelve I2 con I3: NO
 - resuelve I2 con I4: $\neg q(f(b))$
 - resuelve I3 con I4: $p(a, f(b)) \vee p(b, f(b))$
- $R = \{I5: q(f(b)), \quad I6: \neg q(f(b)), \quad I7: p(a, f(b)) \vee p(b, f(b))\}$
- En R no está \square , por tanto redefinimos $C = C \cup R$ y buscamos nuevos resolventes:
 - resuelve I1 con I5: NO
 - resuelve I1 con I6: NO
 - resuelve I1 con I7: $p(b, f(b))$
 - resuelve I2 con I5: NO
 - resuelve I2 con I6: NO
 - resuelve I2 con I7: $p(a, f(b))$
 - resuelve I3 con I5: NO
 - resuelve I3 con I6: $p(a, f(b))$
 - resuelve I3 con I7: NO
 - resuelve I4 con I5: $p(b, f(b))$
 - resuelve I4 con I6: NO
 - resuelve I4 con I7: NO
- resuelve I5 con I6: \square
- resuelve I5 con I7: NO
- resuelve I6 con I7: NO
- $R = \{p(b, f(b)), \quad p(a, f(b)), \quad \square\}$
- R incluye a $\square \rightarrow$ **C es insatisfacible**

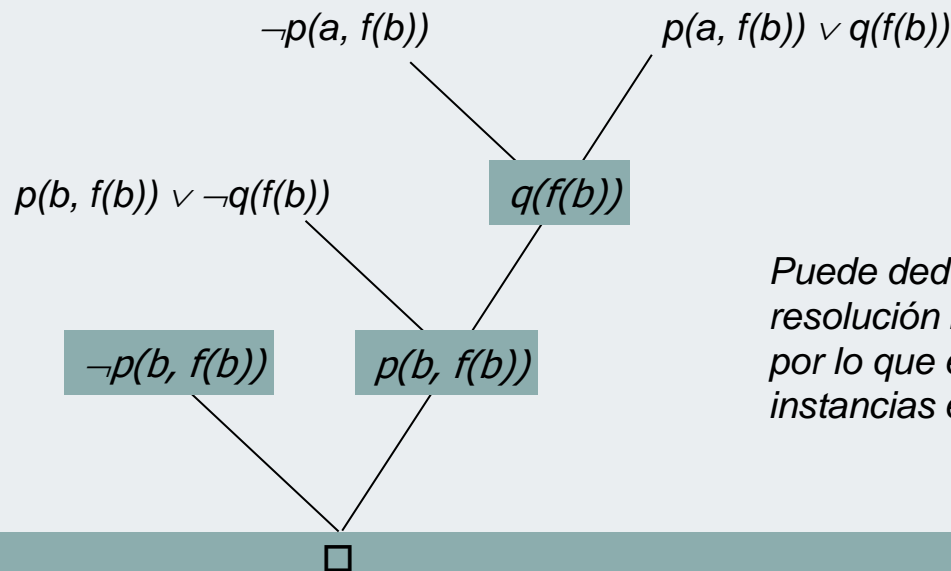


El método de resolución de Robinson.

11/12

- En la práctica, la aplicación de sucesivos pasos de resolución se puede representar en forma de árbol (**árbol de resolución**):
 - árbol binario invertido (cada dos nodos tienen un 'hijo' común)
 - cada nodo representa una instancia básica
 - el nodo hijo de otros dos nodos es el resolvente de las instancias correspondientes
- En el árbol de resolución sólo se representan los pasos relevantes para llegar a \square

Conjunto de instancias básicas: $\{\neg p(a, f(b)), \neg p(b, f(b)), p(a, f(b)) \vee q(f(b)), p(b, f(b)) \vee \neg q(f(b))\}$



Puede deducirse por resolución la cláusula vacía, por lo que el conjunto de instancias es insatisfacible



El método de resolución de Robinson.

12/12

- Procedimiento general de decisión de insatisfacibilidad:
 - 1) Generar todos los conjuntos posibles de instancias básicas
 - 2) Para cada conjunto de instancias básicas aplicar el método de resolución
- El paso 1) es especialmente costoso e ineficiente. Idea de Robinson: “retrasar” la sustitución de variables por términos de H , instanciando sólo aquellas variables que sean necesarias en cada paso de resolución
- Robinson planteó trabajar directamente con las cláusulas pero de manera que representen siempre una **clase de instancias básicas** lo más general posible. Cada aplicación de la regla de resolución debe dar un resolvente (con variables) que represente la clase de instancias básicas que se hubieran podido obtener aplicando resolución con instancias básicas